INTRODUZIONE

DEF: La distanza $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tc

i) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

Esempi: presi $x,y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$

- Disuguaglianza Euclidea: $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
- $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
- $d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i - y_i|\}$

DEF: Uno spazio si dice normato se $\exists$ una funzione $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ detta norma tc:

i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$

ii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n$

iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Esempi:

- Norma Euclidea: $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$
- $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$
- $\|v\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{|v_i|\}$

OSS: In seguito verrà dato per scontato che $d(x,y) = d_2(x,y)$ e $\|v\| = \|v\|_2$

DEF: Una funzione scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice prodotto se

i) $\langle v,v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$

ii) (è bilineare) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \langle v, \lambda w \rangle \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\langle v+w, u \rangle = \langle v,u \rangle + \langle w,u \rangle \quad \forall v,w,u \in \mathbb{R}^n$

iv) (simmetria) $\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n$

OSS: si associa il prodotto scalare ad una matrice $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ simmetrica ($A = A^T$) quindi diagonalizzabile. La definisco positiva cioè con autovalori tutti positivi (>0)

$\langle v,w \rangle_A = v^T \cdot A \cdot w$ (prodotto riga x colonna)

DEF: Dato $v \in \mathbb{R}^n$ si dice che $w \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale a v se $\langle v,w \rangle = 0$ e $v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v,w \rangle = 0\} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid v^T A w = 0\}$

DEF: $v^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$ (se $v \neq 0$) o n se $v = 0$.

PROP: DISUGUAGLIANZA di CAUCHY - SCHWARZ
Sia $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$. Allora $\forall v,w \in \mathbb{R}^n$

$|\langle v,w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ e $|\langle v,w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tc $v = \lambda w$

DIM: Sviluppiamo $\langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle \geq 0 \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\langle v, v+\lambda w\rangle + \langle \lambda w, v+\lambda w\rangle \geq 0$

$\langle v, v\rangle + \lambda\langle v, w\rangle + \lambda\langle w, v\rangle + \lambda^2\langle w, w\rangle \geq 0$

$\langle v, v\rangle + 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle w, w\rangle \geq 0$; ottengo un polinomio di 2° grado in $\lambda \Rightarrow \Delta \leq 0$

$\Delta = |\langle v, w\rangle|^2 - \|w\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq 0$

$\Delta < 0 \iff |\langle v, w\rangle| < \|v\| \cdot \|w\| \rightarrow P(\lambda) > 0$

$\Delta = 0 \iff |\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \iff \exists \lambda_0$ tc $P(\lambda_0) = 0 =$

$\langle v + \lambda_0 w, v + \lambda_0 w\rangle = 0 \iff v + \lambda_0 w = 0$ ∎

DEF: Dato $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ si dice intorno (sferico) di x di raggio ε l'insieme

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < \varepsilon\}$$

DEF: Dato $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ si dice sfera di centro x e di raggio ε

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = \varepsilon\}$$

DEF: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se $\forall x \in E \ \exists \varepsilon > 0$ tc $B_\varepsilon(x) \subset E$

DEF: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso se $E^c := \mathbb{R}^n \setminus E$ è aperto

DEF: si dice che $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto interno ad E se $\exists \varepsilon > 0$ tc $B_\varepsilon(x) \subset E$

DEF: si dice che $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto esterno ad E se è interno ad E^c

DEF: si dice che $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto di frontiera per E se non è né interno né esterno.

DEF: si dice parte interna di E $\overset{\circ}{E} = \{$punti interni ad $E\}$ e frontiera di E $\partial E = \{$punti di frontiera$\}$; infine la chiusura di E, $\overline{E} = E \cup \partial E$

DEF: si dice $x \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per E se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in E \cap (B_\varepsilon(x) \setminus \{x\})$

OSS: $B_\varepsilon(x) \setminus \{x\} = \{y : 0 < d(x,y) < \varepsilon\}$

DEF: si dice $x \in \mathbb{R}^n$ punto isolato per E, se $x \in E$ ma non è punto di accumulazione

DEF: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists R > 0$ tc $E \subseteq B_R(0)$

DEF: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice compatto se è chiuso e limitato

DEF: ∞ è punto di accumulazione per E se $\forall R > 0$ $\exists y \in$ tc $y \in \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,0) > R\} \iff \exists y \in \mathbb{R}^n$ tc $\|y\| > R$

SUCCESSIONI

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \quad ; m \geq 1 \\ k & \longmapsto & x_k \end{array}$$

DEF: $(m=1)$ $\{x_k\}_{k\geq 1}$ converge a $L \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{k}$ tc se $k \geq \bar{k} \Rightarrow$ $\rightarrow |x_k - L| < \varepsilon$ oppure $\forall \varepsilon \ \exists \bar{k}$ tc $k \geq \bar{k} \rightarrow d(x_k, L) < \varepsilon$

$(m > 1)$ $\{x_k\}_{k\geq 1}$ converge a $L \in \mathbb{R}^m$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{k}$ tc $k \geq \bar{k} \Rightarrow$ $\Rightarrow d(x_k, L) < \varepsilon$

OSS 1: $d(x_k, L) = \|x_k - L\|$

OSS 2: $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} L \in \mathbb{R}^m \iff (x_k)_i \xrightarrow{k\to+\infty} L_i \quad \forall i = 1, \dots, m$

questo perché ho definito la successione a termini positivi

Esempio: $x_k = \left(\frac{1}{k}, \log\left(2 + \frac{1}{k^2}\right)\right)$; $k \to +\infty$. Se guardo le componenti

$\frac{1}{k} \longrightarrow 0$

$\log\left(2 + \frac{1}{k^2}\right) \longrightarrow \log 2$

$\Rightarrow \quad L = (0, \log 2)$

DEF: $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^m$, $m > 1$, diverge se $\forall R \ \exists \bar{k}$ tc $k \geq \bar{k} \Rightarrow$

i) $x_k \in \mathbb{R}^m \setminus B_R(0)$

ii) $d(x_k, 0) > R$

iii) $\|x_k\| > R$

OSS 1: $\{x_k\}$ diverge $\iff \lim_{k\to+\infty} \|x_k\| = +\infty$

$(x_k)_i \longrightarrow \pm\infty \quad \forall i = 1, \dots, m \Rightarrow \{x_k\}$ diverge

OSS 2: se $\{(x_k)_i\}$ sono limitate $\forall i = 1, \dots, m \Rightarrow \{x_k\}_k$ è limitata

quindi non diverge.

Proprietà:

i) Le successioni convergenti sono limitate, ossia $\exists R > 0$ tc $x_k \in B_R(0)$ $\forall k \geq 1$ $(\|x_k\| \leq R)$

ii) La successione converge $\iff$ è di Cauchy, ossia $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{k}$ tc $k_1, k_2 > \bar{k} \Rightarrow d(x_{k_1}, x_{k_2}) < \varepsilon$.

iii) Se $\{x_k\}$ è limitata esiste una sottosuccessione convergente

Quest'ultimo dipende da: Teorema di Bolzano - Weierstrass: se $E \subset \mathbb{R}^m$ è limitato e infinito (cardinalità) allora l'insieme dei punti di accumulazione, $acc(E) \neq \emptyset$.

FUNZIONI

DEF: f è limitata se $\text{Im } f \subseteq \mathbb{R}^m$ è limitata

DEF: se $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice che $x_0 \in X$ è punto di massimo locale se $\exists \varepsilon > 0$ tc $f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in B_\varepsilon(x_0)$; è punto di minimo se $f(x_0) \leq f(x) \ \forall x \in B_\varepsilon(x_0)$

OSS: per $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $m > 1$, non si parla più di sup, inf, max e min, ma esistono solo degli ordinamenti.

LIMITI

DEF 1: Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è punto di accumulazione, si dice

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^m$ se: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tc $d(f(x), L) < \varepsilon$

$\forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

DEF: Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è punto di accumulazione, si dice

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $(\mathbb{R}^m)$ se $\forall R > 0$, $\exists \delta > 0$ tc

$d(f(x), 0) > R \iff \|f(x)\| > R \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

DEF: Se $x_0 = \infty$ in $\mathbb{R}^n$ punto di accumulazione, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^m$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0$ tc $d(f(x), L) < \varepsilon \iff \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_R(0)$ cioè $\|x\| > R$

DEF: Se $x_0 = \infty$ in $\mathbb{R}^n$ punto di accumulazione, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $(\mathbb{R}^m)$
$\forall M > 0$, $\exists R > 0$ tc $\|f(x)\| > M$ $\forall x$ tc $\|x\| > R$

DEF: $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è continua in $x_0 \in X$ se
i) x_0 è un punto isolato
ii) x_0 è un punto di accumulazione
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

OSS 1: $f(x) \longrightarrow L \in \mathbb{R}^m$ per $x \to x_0 \iff f_i(x) \longrightarrow L_i \in \mathbb{R}$

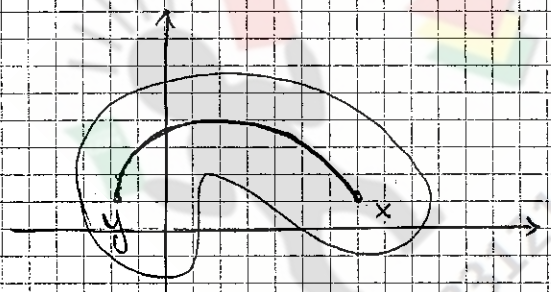
OSS 2: se $f_i(x) \longrightarrow \pm\infty$ $\forall i \Rightarrow f(x) \longrightarrow \infty$ in $\mathbb{R}^m$

Continua in X: $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tc $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$
$\forall y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}$

Uniformemente continua in X: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tc $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$
$\forall x, y$ tc $d(x, y) < \delta$

DEF: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, si dice curva (γ, I) dove $\gamma: I \to \mathbb{R}^m$ è continua.
$\operatorname{Im}\gamma :=$ sostegno $\qquad \gamma :=$ parametrizzazione.

DEF: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice connesso per archi se $\forall x, y \in X$ $\exists \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua tc $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ e $\operatorname{Im}\gamma \in X$.



TEOREMA PONTE: $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{Acc}(X) \subseteq \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \iff \forall A \subseteq X$ tc $x_0 \in \operatorname{Acc}(A)$
$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in A}} f(x) = L$

Cioè applico delle restrizioni al dominio: Alcuni esempi:
$A_1 = \{y = 0, \ x > 0\}$ e $A_2 = \{x = 0, \ y > 0\}$ gli assi
$A_3 = \{y = \lambda x\}$ fasci di rette; $A_4 = \{y = x^\alpha, \ \alpha > 1, \ x > 0\}$ curve tangenti all'asse x.

TEOREMA del CONFRONTO: $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{Acc}(X_0)$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se $\exists g: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definita almeno su un intorno di x_0, tc $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ e $0 \le |f(x) - l| \le g(x)$ in $B_\varepsilon(x_0)$

Se il primo teorema permette di vedere direttamente la non esistenza del limite (risultati diversi per due restrizioni diverse), questo invece permette di dimostrarne l'esistenza.

Alcune disuguaglianze utili:

$2|xy| \le |x|^2 + |y|^2 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ $\qquad |x+y| \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

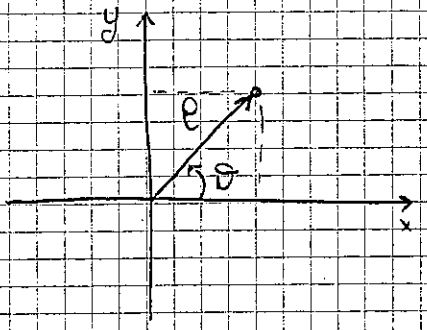
$|x+y+z| \le c \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ e $\forall c = \text{cost} \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{a^2+b^2} \le \frac{1}{a^2} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ $\qquad |x+y| \le |x| + |y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$|\sin x| \le x \quad \forall x \ge 0$ $\qquad 1 - \cos x \le \frac{x^2}{2} \quad \forall x \ge 0$

$\log(1+|x|) \le |x|$

COORDINATE POLARI



$P = (x_0, y_0) \longmapsto (\varrho_0, \vartheta_0)$

dove $\varrho_0 \ge 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$

Formula di passaggio:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta \\ y = \varrho \sin\vartheta \end{cases}$$

Esempio 1: $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{xy\,z^2}{y^2+z^2}$

$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

- Restrizioni (Teorema Ponte)

Asse y: $\lim_{\substack{y \to 0 \\ x=z=0}} \frac{xy\,z^2}{y^2+z^2} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ z=x=0}} \frac{0}{y^2} = 0$

Asse z: $\lim_{\substack{z \to 0 \\ x=y=0}} \frac{0}{z^2} = 0$

- (Teorema del Confronto)

$$0 \le \left| \frac{xy\,z^2}{y^2+z^2} - 0 \right| \le \left| \frac{xy}{y^2+z^2} \right| \cdot z^2 \overset{\circledast}{\le} \frac{|x \cdot z| \cdot (y^2+z^2)}{y^2+z^2} \longrightarrow 0 \quad \text{ok}$$

$\circledast \quad |yz| \le y^2 + z^2$

Esempio 2: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- Restrizioni (Teorema Ponte): facendo semplici restrizioni agli assi notiamo che se il limite esiste deve essere zero.
- (Controllo): uso le coord. polari

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \sup_{\vartheta} \left(\left| \frac{\sin(\varrho^2 \cdot \cos^2\vartheta + \varrho^2 \sin^2\vartheta)}{\sqrt{\varrho^2 \cdot \cos^2\vartheta + \varrho^2 \cdot \sin^2\vartheta}} \right| \right) =$$

$$= \lim_{\varrho \to 0^+} \sup_{\vartheta} \left(\left| \frac{\sin \varrho^2}{\varrho} \right| \right) = \lim_{\varrho \to 0^+} \left| \frac{\sin \varrho^2}{\varrho} \right| = 0 \quad \text{ok}$$